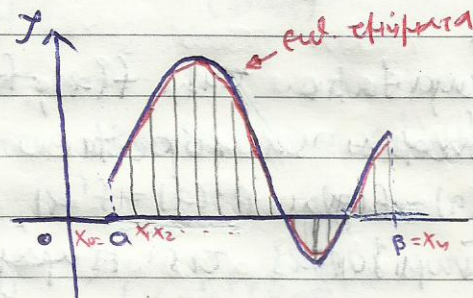


ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ SPLINE

Παρεμβολή με τμηματικά γραμμ. συναρτήσεις:

Θεωρούμε διαστήριον $X_n = \{a, x_1, \dots, x_n = b\}$
Στο διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ παίρνουμε
το πολυώνυμο παρεμβολής κατά του
Lagrange 1^{ου} βαθμού:



$$P(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} x + \frac{x_{i+1} f_i - x_i f_{i+1}}{h_i}$$

για κάθε $i=0, 1, 2, \dots, n-1$

Ασκηση

Να βρεθεί η τμηματικά γραμμική συνάρτηση
που προσεγγίζει των $f(x) = x + \frac{1}{x}$ στο $X_4 = \{1, 2, 3, 4\}$
ΜΥΣΗ

x_i	1	2	3	4
f_i	2	$5/2$	$10/3$	$17/4$

$$x \in [1, 2]: P(x) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} x + \frac{2f(1) - 1 \cdot f(2)}{2 - 1} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$x \in [2,3]: P(x) = \frac{10/3 - 5/2}{1} x + \frac{3 \frac{2}{3} - 2 \frac{10}{3}}{2} = \frac{5}{6} x + \frac{5}{6}$$

$$x \in [3,4]: P(x) = \frac{17/4 - 10/3}{1} x + \frac{4 \frac{10}{3} - 3 \frac{17}{4}}{1} = \frac{11}{12} x + \frac{7}{12}$$

Παρεμβολή με συναρτήσεις Hermite

Έστω διαμέριση $X_n = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ και
 έχουμε $f_i = f_i(x_i)$ και $f'_i = f'(x_i)$, $\forall i=0,1,\dots,n$
 Υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο $2n+1$ βαθμίου τέτοιο
 ώστε: $P(x_i) = f_i$ και $P'(x_i) = f'_i$

Παρεμβολή με τριγωνικά κυβικά πολυώνυμα Hermite

Κυβικό πολυώνυμο Hermite στο $[a,b]$:

Γνωρίζουμε τις $f(a), f'(a), f(b), f'(b)$

Θέλουμε να βρούμε το $P(x)$ τ/ω:

$$P(a) = f(a), P'(a) = f'(a), P(b) = f(b), P'(b) = f'(b)$$

Γνωρίζοντας τις παραγωγούς είναι σαν να γνωρίζουμε τις
 τιμές σε γειτονικά σημεία του a & b : ατε, $b-\eta$, $\epsilon, \eta \rightarrow 0$
 Επομένως, θεωρούμε μια παρεμβολή κατά Lagrange
 στα σημεία: $a+\epsilon, a$ και το $b-\eta, b$

$$P_3(x) = \frac{(x-a-\epsilon)(x-b+\eta)(x-b)}{-\epsilon(a-b+\eta)(a-b)} f(a) +$$

$$+ \frac{(x-a)(x-b+\eta)(x-b)}{\epsilon(a+\epsilon-b+\eta)(a+\epsilon-b)} f(a+\epsilon) + \frac{(x-a)(x-a-\epsilon)(x-b)}{(b-\eta-a)(b-\eta-a-\epsilon)(-\eta)} f(b-\eta) +$$

$$+ \frac{(x-a)(x-a-\epsilon)(x-b+\eta)}{(b-a)(b-a-\epsilon)\eta} f(b) = S_1 + S_2$$

Βάζω κοινό παράγοντα στο S_1

$$S_1 = (x-a)(x-b+\eta)(x-b) \left[\frac{\frac{f(a+\epsilon)}{(a+\epsilon-b+\eta)(a+\epsilon-b)} - \frac{f(a)}{(a-b+\eta)(a-b)}}{\epsilon} \right] + \frac{(x-b+\eta)(x-b)}{(a-b+\eta)(a-b)} f(a)$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} S_L = (x-a)(x-b)^2 \left[\frac{\frac{f(a+\varepsilon)}{(a-b+\varepsilon)} - \frac{f(a)}{(a-b)^2}}{\varepsilon} \right] + \frac{(x-b)^2}{(a-b)^2} f(a)$$

$$\lim_{\varepsilon, n \rightarrow 0} S_1 = (x-a)(x-b)^2 \left[\frac{f(a)}{(a-b)^2} \right]' + \frac{(x-b)^2}{(a-b)^2} f(a)$$

οπου

$$\left(\frac{f(a)}{(a-b)^2} \right)' = \frac{f'(a)(a-b)^2 - 2(a-b)f(a)}{(a-b)^4} = \frac{1}{(a-b)^2} \left[f'(a) - 2 \frac{f(a)}{(a-b)} \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon, n \rightarrow 0} S_1 = \frac{(x-a)(x-b)^2}{(a-b)^2} \left[f'(a) - 2 \frac{f(a)}{(a-b)} \right] + \frac{(x-b)^2}{(a-b)^2} f(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon, n \rightarrow 0} S_1 = \left[\frac{(x-b)^2}{(b-a)^2} + 2 \frac{(x-a)(x-b)^2}{(b-a)^3} \right] f(a) + \frac{(x-a)(x-b)^2}{(b-a)^2} f'(a)$$

Ετσι, το S_2 δίνει συμμετρική έκφραση του S_1 αν αλλάξουμε τους ρόλους στα a και b .

$$\lim_{\varepsilon, n \rightarrow 0} S_2 = \left[\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2} - 2 \frac{(x-b)(x-a)^2}{(b-a)^3} \right] f(b) + \frac{(x-b)(x-a)^2}{(b-a)^2} f'(b)$$

Τελικά, η συνάρτηση Hermite είναι:

$$\begin{aligned} h(x) &= \lim_{\varepsilon, n \rightarrow 0} S_1 + \lim_{\varepsilon, n \rightarrow 0} S_2 = \\ &= \left[\frac{(x-b)^2}{(b-a)^2} + 2 \frac{(x-a)(x-b)^2}{(b-a)^3} \right] f(a) + \frac{(x-a)(x-b)^2}{(b-a)^2} f'(a) + \\ &+ \left[\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2} - 2 \frac{(x-b)(x-a)^2}{(b-a)^3} \right] f(b) + \frac{(x-b)(x-a)^2}{(b-a)^2} f'(b) \end{aligned}$$

Ετσι, λοιπόν αν επισημεύουμε στη διαμέριση $X_n = \{x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b\}$ μπορούμε να υπολογίσουμε την τμηματική συνάρτηση Hermite από των παραπάνω ευφραση, αρκεί να σημειώσουμε με x_i και x_{i+1} τα a και b $\forall i=0, 1, \dots, n-1$ έτσι,

$$h(x) = \left[\frac{(x-x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^2} + 2 \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^3} \right] f_i + \left[\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})^2}{(\Delta x_i)^2} \right] f'_i + \left[\frac{(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} - 2 \frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^3} \right] f_{i+1} + \left[\frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} \right] f'_{i+1}$$

όπου $x \in [x_i, x_{i+1}]$ και $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

Ο χώρος των γραμμ. κυβικών συναρτήσεων Hermite στη διαμέριση $X_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ συμβολίζεται με H_n είναι υπόχωρος του $C^1[a, b]$ και έχει διάσταση $2n+2$ η διάστ. τα επί 4, η διάστασης κυβ. πολυωνύμου σε κάθε διάστημα Δx_i σημείων, $n-1$ περιορισμοί συνέχειας στα $n-1$ ενδιάμεσα σημεία, μέτων $n-1$ περιορισμοί συνέχειας των πρώτων παραγώγων στα $n-1$ ενδιάμεσα σημεία. Δηλαδή:

$$4n - 2(n-1) = \underline{2n+2}: \text{διάσταση του χώρου } H_n$$

Άλλος, τρόπος: η διάσταση του χώρου H_n δίνεται επίσης από τον αριθμό των πηγαίων που απαιτούνται για τον υπολογισμό της h .

Είναι $n+1$ τιμές για τη συνάρτηση και $n+1$ τιμές για των παραγώγων (δηλ. $f_i = f(x_i)$, $f'_i = f'(x_i)$) σε όλα τα σημεία της διαμέρισης άρα είναι: $2(n+1) = \underline{2n+2}$

Επίσης, η διάσταση του χώρου τμηματικά γραμμικών συναρτήσεων (L_n) είναι $n+1$, άρα η διάστασή της $\times 2$ διάστασης κυβ. πολυν. $= 2n+2$, μέτων

$n-1$ αποκτάμε τις σχέσεις στους ενδιάμεσους κόμβους
 $2n - (n-1) = n+1$

Αλλάζω, αλλάζονται οι τιμές $f_i = f(x_i)$ σε όλα τα $n+1$ σημεία : $n+1$ πληροφορίες

Ασκηση

Να βρεθεί η τμήματικά κυβική σάρτη Hermite που παρεμβάλλεται στη σάρτη $f(x) = x^4$ στο σωστό σημείων $x_n = \{-1, 0, 1\}$

ΛΥΣΗ

x_i	-1	0	1
f_i	1	0	1
f'_i	-4	0	4

Από ①+② έχουμε
$$h(x) = \begin{cases} -2x^3 - x^2, & x \in [-1, 0] \\ 2x^3 - x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

• στο $[-1, 0]$ είναι:

$$\begin{aligned} h(x) &= \left[\frac{(x-0)^2}{1^2} + 2 \frac{(x+1)(x-0)^2}{1^3} \right] f(-1) + \left[\frac{(x+1)(x-0)^2}{1^2} \right] f'(-1) + \\ &+ \left[\frac{(x+1)^2}{1^2} - 2 \frac{(x-0)(x+1)^2}{1^3} \right] f(0) + \frac{(x-0)(x+1)^2}{1} f'(0) = \\ &= (x^2 + 2x^3 + 2x^2) \cdot 1 + (x^3 + x^2)(-4) = \\ &= -2x^3 - x^2. \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

• στο $[0, 1]$ είναι:

$$\begin{aligned} h(x) &= \left[\frac{(x-1)^2}{1^2} + 2 \frac{(x-0)(x-1)^2}{1^3} \right] f(0) + \left[\frac{(x-0)(x-1)^2}{1^2} \right] f'(0) + \\ &+ \left[\frac{(x-0)^2}{1} - 2 \frac{(x-1)(x-0)^2}{1^3} \right] f(1) + \frac{(x-1)(x-0)^2}{1} f'(1) = \\ &= (x^2 - 2x^3 + 2x^2) \cdot 0 + (x^3 - x^2) \cdot 0 + \\ &= 2x^3 - x^2. \quad \textcircled{2} \end{aligned}$$